SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

N. GAROFALO

SU UN RISULTATO DI SIMMETRIA RELATIVO AD UN PROBLEMA AI LIMITI SOVRADETERMINATO

5 FEBBRAIO 1987

1. INTRODUZIONE

In [Se] Serrin ha dimostrato il seguente

Teorema. Sia $\Omega \subset R^n$ *un aperto connesso e limitato con frontiera di classe* C^2. *Sia* u $C^2(\bar{\Omega})$ *una soluzione dell'equazione differenziale ellittica*

$$(1.1) \qquad a(u,|\nabla u|)\Delta u + b(u,|\nabla u|)\, u_{x_i} u_{x_j} u_{x_i,x_j} = f(u,|\nabla u|),$$

dove le funzioni a, b *e* f *sono* C^1 *nelle loro variabili. Se* u *soddisfa le condizioni ai limiti*

$$(1.2) \qquad u=0 \;, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \text{costante} \quad su\ \partial\Omega,$$

allora Ω *dev'essere una palla e* u *dev'essere simmetrica rispetto al centro della palla.*

In (1.1) s'è adottata la convenzione seguente; indici ripetuti sottointendono somma rispetto agli stessi. Tale convenzione sarà rispettata nel seguito di questa nota. La condizione di ellitticità in (1.1) si esprime tramite non degenerazione della forma $a_{i,j}(u,\sigma) = b(u,|\sigma|)\sigma_i\sigma_j + a(u,|\alpha|)\delta_{ij}$, $\sigma \in R^n \setminus \{0\}$.

La dimostrazione di Serrin si basa su argomenti di simmetria (in particolare, il metodo degli iperpiani mobili di A.D. Alexandrov) uniti a una versione sofisticata del classico principio di massimo di Hopf alla frontiera. A causa del metodo usato Serrin è costretto a richiedere che tanto il dominio Ω che la soluzione u siano dotati di regolarità almeno C^2. In appendice al lavoro di Serrin è apparsa una breve nota di Weinberger in cui viene presentata una dimostrazione diversa di un caso speciale del Teorema precedente. Specificamente, Weinberger considera il caso in cui $\Delta u = -1$ nella (1.1.). La tecnica di Weinberger si basa su un'identità integrale di tipo Rellich e un principio di massimo interno, si veda [W].

In questa nota esponiamo un risultato di simmetria che estende il metodo di Weinberger a una classe di equazioni ellittiche non lineari e che possano divenire degeneri. Inoltre, nel dominio Ω non si fa alcuna ipotesi di regolarità. Quanto verrà esposto fa parte di un lavoro in collaborazione con John Lewis di recente ultimato, v. [GL]. Introduciamo qualche notazione. Sia $f \in C^2(R^+)$ una funzione positiva, crescente e convessa. Per $p \in (1,+\infty)$ fissato supponiamo che esistano $c_1, c_2 > 0$ tali che

$$(1.2) \qquad c_1(t^p-1) \leq tf'(t) \leq c_2(t^p+1) \quad , \quad t>0,$$

$$(1.3) \qquad c_1 \leq \frac{tf''(t)}{f'(t)} \leq c_2 \quad , \quad t>0 .$$

Osserviamo esplicitamente che (1.3) implica che

$$\lim_{t \to 0^+} f'(t) = f'(0) = 0 .$$

Diremo che $u \in W^{1,p}(\Omega)$ è una soluzione debole di

$$(1.4) \qquad \operatorname{div}(|\nabla u|^{-1} f'(|\nabla u|)\nabla u) = -1 \quad \text{in } \Omega$$

se per ogni $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ si ha

$$(1.5) \qquad \int_\Omega |\nabla u|^{-1} f'(|\nabla u|)\, \nabla u \cdot \nabla\phi \, dx = \int_\Omega \phi dx .$$

Nella (1.5) l'integrando a primo membro è da intendersi nullo in ogni punto in cui $\nabla u = 0$.

Il risultato principale in [GL] è dato dal seguente

<u>Teorema 1.</u> *Sia* $\Omega \subset R^n$ *un aperto limitato e connesso e sia* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *una soluzione debole non negativa di* (1.4). *Supponiamo che esista* $a>0$ *tale che* $|\nabla u(x)| \to a$, $u(x) \to 0$ quando $x \to \partial\Omega$ *nel senso seguente:*

dato $\varepsilon>0$ *esiste un aperto* $O=O(\varepsilon)\supset\partial\Omega$ *tale che*

$$(1.6)\qquad \left|\,|\nabla u(x)-a|\,\right| < \varepsilon \quad , \quad u(x) < \varepsilon \, ,$$

per quasi ogni $x\in O\cap\Omega$. *Allora* Ω *è una palla e* u *è simmetrica rispetto al centro della palla.*

Osserviamo che nessuna ipotesi di regolarità è stata fatta su $\partial\Omega$. Inoltre, si assume che la u sia soluzione solo in senso debole e che le condizioni ai limiti siano verificate solo nel senso espresso dalla (1.6). E' il caso di notare che se $f(t) = \frac{t^p}{p}$ in (1.2), (1.3), allora il primo membro di (1.4) è il così detto p-*Laplaciano* di u, cioè $\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2} u)$. In tal caso la funzione

$$(1.7)\qquad u(x) = [R^{\frac{p}{p-1}} - |x|^{\frac{p}{p-1}}](1-\frac{1}{p})\, n^{-\frac{1}{p-1}} \quad , \ |x|<R,$$

è una soluzione debole di (1.4) in $\Omega = \{x \,|\, |x|<R\}$, soddisfacente le condizioni al contorno $u=0$, $\frac{\partial u}{\partial n} = -(\frac{R}{n})^{\frac{1}{p-1}}$ su $\partial\Omega$. Osserviamo che $-(\frac{R}{n})^{\frac{1}{p-1}} = (\frac{|\Omega|^{1/n}}{n\omega_n^{1/n}})^{\frac{1}{p-1}}$.

Inoltre, la funzione u in (1.7) non è C^2 se $p>2$, e quindi l'assunzione a priori nel Teorema di Serrin sopra ricordato sarebbe nel presente contesto impropria.

L'equazione (1.4) sipresenta nello studio del moto rettilineo stazionario di un fluido incompressibile non-Newtoniano. (Si dice tale un fluido che non verifichi la legge d'inerzia di Newton). Se, infatti, u denota la componente del campo vettoriale velocità nella direzione del flusso, e μ e ϕ sono le funzioni materiali che denotano lo stress radente e normale rispettivamente, allora le condizioni dinamiche per il flusso rettilineo si riducono alle relazioni

$$(1.8)\qquad \begin{cases} \operatorname{div}(\mu\nabla u) = 2a \\ \operatorname{div}(\phi\nabla u)\nabla u=\nabla g \end{cases},$$

essendo a = costante, $\mu = \mu(|\nabla u|^2)$, $\phi = \phi(|\nabla u|^2)$ e g una funzione legata alla pressione idrostatica. E' allora chiaro che si pone $f(t) = \int_0^t s\mu(s^2)ds$ e $a= -\frac{1}{2}$ nella prima equazione in (1.8), quest'ultima si riduce alla (1.4). La seconda equazione in (1.8) è scritta in forma vettoriale. E' ovvio che ogni sua parte scalare contiene termini del tipo $\operatorname{div}(|\nabla u|^{-1}f'(|\nabla u|)\nabla u)$. Una derivazione delle (1.8) è contenuta in [FS], dove si dimostra il seguente

Teorema. *Sotto opportune ipotesi di analiticità sulle funzioni* μ *e* ϕ*, ammesso che* $\phi \not\equiv$ cost. μ, *e sotto la condizione di aderenza* $u=0$ *su* $\partial\Omega$, *il flusso rettilineo stazionario di un fluido incomprensibile non-Newtoniamo (le cui funzioni materiali siano* μ *e* ϕ*) in un tubo fissato di sezione trasversale* $\Omega\subset R^2$ *è impossibile, a meno che* Ω *sia o un cerchio oppure un anello fra due circonferenze concentriche.*

Va osservato che tale risultato era stato congetturato sulla base di considerazioni fisiche da J. Ericksen in [E]. Nel caso di un fluido (Newtoniano) viscoso e incompressibile che si muova in un tubo cilindrico retto di sezione Ω, e le cui linee di flusso siano rette parallele alle generatrici del cilindro, la componente del vettore velocità nella direzione del moto soddisfa l'equazione (qui n=2)

$$\Delta u = - \text{cost.} \quad \text{in } \Omega,$$

con la condizione d'aderenza

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \ .$$

Ciò corrisponde alla scelta $f(t) = \frac{t^2}{2}$ in (1.4). Siccome lo stress tangenziale per unità di superficie è dato da $\mu \frac{\partial u}{\partial n}$, essendo μ la viscosità del fluido, allora il Teorema 1 implica che *lo stress tangenziale lungo le pareti del tubo è lo stesso in ogni punto se e solo se la sezione del tubo, Ω, è circolare.*

A conclusione di questo paragrafo citiamo un problema di simmetria diverso da quello qui studiato, ma ad esso legato (si veda ad es. [Y], p. 688, problema 80).

Congettura di Schiffer. *Sia $\Omega \subset R^n$ un aperto connesso con frontiera C^2. Supponiamo che esista una soluzione del problema*

$$(1.9)\qquad \begin{cases} \Delta w = -\nu w \quad \text{in } \Omega, \quad \nu>0, \\ w\big|_{\partial\Omega} = b, \ b = \text{costante}, \ \frac{\partial w}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Allora Ω è una palla e w è simmetrica.

La connessione fra il problema (1.9) e il problema sovradeterminato che si studia in questa nota è la seguente. Sia w una soluzione di (1.9), e si ponga

$$(1.10)\qquad u = \frac{w}{b\nu} - \frac{1}{\nu} .$$

Allora $\Delta u = \frac{1}{b\nu} \Delta w = - \frac{1}{b} w = -\nu u - 1$ in Ω, $u\big|_{\partial\Omega} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = \frac{1}{b\nu} \frac{\partial w}{\partial n} = 0$.

Quindi u in (1.10) risolve il problema

$$(1.11)\qquad \begin{cases} \Delta u + \nu u = -1 \quad \text{in } \Omega \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0 \ , \ \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Questo problema è simile a quello, studiato in [S] e [W], di cui in questa nota si considera un'estensione. La congettura di Schiffer costituisce un problema ancora aperto. Si conoscono solo soluzioni parziali. C. Berenstein ha fatto vedere in [B] che se $\nu=\nu_2$ (il primo autovalore di Neumann positivo), allora la congettura è vera. Essa è anche vera se esistono infinite soluzioni di (1.9) con infiniti autovalori. Ciò è stato provato di recente da Berenstein e P. Young in [BY]. Aviles in [A] ha anche lui ottenuto dei risultati parziali.

Per concludere osserviamo che la congettura di Schiffer si può dimostrare equivalente al seguente problema in analisi armonica (si veda ad es. [B]).

Problema di Pompeiu. *Dato un dominio limitato* $\Omega \subset R^n$, *con frontiera* $\partial\Omega$ *connessa e Lipschitziana, esiste* $f \not\equiv 0$, $f \in C^\infty(R^n)$, *tale che per ogni movimento rigido* $T : R^n \to R^n$ *si abbia*

$$(1.12) \qquad \int_{T(\Omega)} f(x)dx = 0 \quad ?$$

Se Ω è una palla la risposta è affermativa, si veda $[Wi]_1$ e [B]. S. Williams ha congetturato in $[Wi]_1$ che: *le palle sono gli unici domini per cui la risposta al problema di Pompeiu è affermativa*. Lo stesso autore ha dimostarto in $[Wi]_2$ il seguente importante risultato: *Se esiste una soluzione di* (1.9) *per un dominio* Ω *con frontiera Lipschitziana, allora in realtà* $\partial\Omega$ *è analitica reale.*

2. CENNI SULLA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1.

La dimostrazione del risultato di simmetria sotto le ipotesi generali del Teorema 1 comporta dettagli tecnici piuttosto laboriosi. L'esposizione di tali dettagli è fatta in [GL], e noi intendiamo evitare in questa sede inutili ripetizioni. Invece, vogliamo qui illustrare a grandi linee le principali idee su cui si basa la dimostrazione del Teorema 1, e facciamo ciò trat-

tando un caso speciale. Assumeremo nel seguito che Ω sia un dominio a frontiera regolare, C^2 per intenderci. Assumeremo inoltre che la funzione f in (1.2), (1.3) sia siffatta

$$f_\varepsilon(t) = \frac{1}{p}(\varepsilon^2 + t^2)^{\frac{p}{2}} , \tag{2.1}$$

essendo $\varepsilon>0$ fissato. Osserviamo subito che

$$\begin{cases} t^{-1}f'_\varepsilon(t) = (\varepsilon^2 + t^2)^{\frac{p}{2}-1} \\ f''_\varepsilon(t) = (p-2)t^2(\varepsilon^2+t^2)^{\frac{p}{2}-2} + (\varepsilon^2+t^2)^{\frac{p}{2}-1} \\ f'''_\varepsilon(t) = (p-2)(p-4)t^3(\varepsilon^2+t^2)^{\frac{p}{2}-3} + 3(p-2)t(\varepsilon^2+t^2)^{\frac{p}{2}-2} . \end{cases} \tag{2.2}$$

Dalla seconda delle (2.2) si trae $f''_\varepsilon(0) = \varepsilon^{p-2}$.

Consideriamo il problema di minimizzare il funzionale

$$\Phi_\varepsilon(\zeta) = \int_{R^n} (f_\varepsilon(|\nabla\zeta|) - \zeta)dx \tag{2.3}$$

sulle $\zeta \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\| \|_{1,p}}$, essendo

$$\|u\|_{1,p} = \sum_{|\alpha|\leq 1} \|D^\alpha u\|_p .$$

E' ben noto, si veda ad es. [LaU, cap. 5] che tale problema ha un'unica soluzione $u_\varepsilon \in \overset{\circ}{W}{}^{1,p}(\Omega)$ che è una soluzione debole dell'equazione

$$\mathrm{div}(|\nabla u_\varepsilon|^{-1} f_\varepsilon\ |\nabla u_\varepsilon|)\nabla u_\varepsilon) = a_{ij}(\nabla u_\varepsilon)(u_\varepsilon)_{x_i x_j} = -1 , \tag{2.4}$$

dove per $\sigma \in R^n \setminus \{0\}$ abbiamo posto

$$a_{ij}(\sigma)=|\sigma|^{-3}[|\sigma|f''_\varepsilon(|\sigma|)-f'_\varepsilon(|\sigma|)]\sigma_i\sigma_j+\delta_{ij}|\sigma|^{-1}f'_\varepsilon(|\sigma|). \tag{2.5}$$

Notiamo esplicitamente che esiste una costante C>0 e una successione $(\delta_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$, con $\delta_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$, tale che

$$c^{-1}(t^p-1) \leq tf'_\varepsilon(t) \leq c(t^p+1) \quad , \quad t>0, \tag{2.6}$$

$$c^{-1} \leq \frac{tf''_\varepsilon(t)}{f'_\varepsilon(t)} \leq c \quad , \quad t>0, \tag{2.7}$$

$$\delta_\varepsilon \leq t^{-1}f'_\varepsilon(t) \leq \delta_\varepsilon^{-1} \quad , \quad 0<t<1. \tag{2.8}$$

Usando la (2.7) dalla (2.5) si deduce che $\sigma\ R^n\setminus\{0\}$

$$\min(c^{-1},1)|\xi|^2 f'_\varepsilon(|\sigma|)|\sigma|^{-1} \leq a_{ij}(\sigma)\xi_i\xi_j \leq \max(c,1)|\xi|^2 f'_\varepsilon(|\sigma|)|\sigma|^{-1}. \tag{2.9}$$

Dalle (2.9), (2.8) e (2.6) si deduce infine l'esistenza di una costante $b_\varepsilon>0$ tale che $\forall\sigma\in R^n\setminus\{0\}$

$$b_\varepsilon|\xi|^2(1+|\sigma|)^{p-2} \leq a_{ij}(\sigma)\xi_i\xi_j \leq b_\varepsilon^{-1}|\xi|^2(1+|\sigma|)^{p-2}. \tag{2.10}$$

Se $\sigma=0$ poniamo (cfr. (2.2))

$$a_{ij}(0) = \delta_{ij}\ f''_\varepsilon(0) = \delta_{ij}\ \varepsilon^{p-2}. \tag{2.11}$$

Allora (2.5) definisce delle funzioni $a_{ij}\in C^\infty(R^n)$. Da ciò e dalle (2.10), in base al Teorema 6.1 in [LaU, cap. 5], concludiamo che in realtà u_ε è una soluzione classica di (2.4), cioè $u_\varepsilon\in C^\infty(\Omega)$. Da ora in poi supporremo fissata la funzione f_ε come in (2.1), e per semplicità di notazione scriveremo solo f. Consideriamo il problema

$$(2.12)\quad \begin{cases} \operatorname{div}((\varepsilon^2 + |\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u) = -1 & \text{in } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \ , \ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = a. & (a = \text{costante}) \end{cases}$$

Notiamo che nella notazione (1.4) risulta $(\varepsilon^2+|\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}} = |\nabla u|^{-1} f'(|\nabla u|)$ in ogni punto dove $|\nabla u| \neq 0$. Ricordiamo che stiamo assumendo $\partial\Omega \in C^2$.

Il caso speciale del Teorema 1 che vogliamo trattare è espresso dal seguente

Teorema 2. *Sia* $u \in C^2(\bar{\Omega})$ *una soluzione di* (2.12). *Allora* Ω *è una palla e* u *è simmetrica rispetto al centro di essa.*

La dimostrazione del Teorema 2 si basa principalmente su due Lemmi. Nel seguito $\vec{n}$ denota la normale esterna a $\partial\Omega$.

Lemma 1. *Sia* $u \in C^2(\bar{\Omega})$. *Allora, se* f *è come in* (2.1)

$$(2.13)\quad \int_{\partial\Omega} f(|\nabla u|)\, x \cdot \vec{n}\, d\sigma = n \int_{\Omega} f(|\nabla u|)dx$$

$$+ \int_{\partial\Omega} (x \cdot \nabla u) \frac{\partial n}{\partial n} |\nabla u|^{-1} f'(|\nabla u|)d\sigma - \int_{\Omega} |\nabla u| f'(|\nabla u|)dx$$

$$- \int_{\Omega} (x \cdot \nabla u)\operatorname{div}(|\nabla u|^{-1} f'(|\nabla u|)\nabla u)dx \ .$$

Nella (2.13) $|\nabla u|^{-1} f'(|\nabla u|)$ è da interpretarsi come $f''(0)$ nei punti $x \in \bar{\Omega}$ in cui $\nabla u(x) = 0$ (cfr. (2.2)).

Prova. Dal Teorema della divergenza si ottiene

$$(2.14)\qquad \int_{\partial\Omega} f(|\nabla u|)\, x\cdot\vec{n}\, d\sigma = \int_{\Omega} \mathrm{div}(f(|\nabla u|)x) =$$

$$= n\int_{\Omega} f(|\nabla u|)\, dx + \int_{\Omega} x_i (f(|\nabla u|))_{x_i}\, dx =$$

$$= n\int_{\Omega} f(|\nabla u|)dx + \int_{\Omega} x_i |\nabla u|^{-1} f'(|\nabla u|)\, u_{x_j x_i}\, u_{x_j}\, dx$$

$$= n\int_{\Omega} f(|\nabla u|)dx + \int_{\Omega} x_i\, (|\nabla u|^{-1} f'(|\nabla u|)\, u_{x_i}\, u_{x_j})_{x_j}\, dx$$

$$- \int_{\Omega} x_i (|\nabla u|^{-1}\, f'(|\nabla u|)\, u_{x_j})\, u_{x_i}\, dx$$

$$= n\int_{\Omega} f(|\nabla u|)dx + \int_{\partial\Omega} x_i n_j\, |\nabla u|^{-1} f'(|\nabla u|)\, u_{x_i}\, u_{x_j}\, d\sigma$$

$$- \int_{\Omega} \delta_{ij}\, |\nabla u|^{-1}\, f'(|\nabla u|)\, u_{x_i}\, u_{x_j}\, dx \; - \int_{\Omega} (x\cdot\nabla u)\, \mathrm{div}(|\nabla u|^{-1} f'(|\nabla u|))dx$$

L'ultimo membro nella (2.14) è ciò che appare nel lato destro della (2.13).

<u>Corollario 1</u>. (Isoperimetrico). *Sia* $u\in C^2(\bar{\Omega})$ *una soluzione del problema* (2.12). *Allora vale la seguente identità*

$$(2.15)\qquad \int_{\Omega} \{[|\nabla u| f'(|\nabla u|)] + \frac{1}{n} u\}\, dx = (|a| f'(|a|) - f(|a|))\, |\Omega| .$$

<u>Prova</u>. Osserviamo preliminarmente che

$$(2.16)\qquad \int_{\partial\Omega} x\cdot\vec{n}d\sigma = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n}(|x|^2)d\sigma = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \Delta(|x|^2)dx = n|\Omega|$$

Inoltre, essendo $u|_{\partial\Omega} = 0$ si ha $|\nabla u|^2 = (\frac{\partial u}{\partial n})^2 = a^2$ su $\partial\Omega$. Per $x \in \partial\Omega$ scriviamo $x = (x\cdot\vec{n})\vec{n} + \alpha(x)\vec{t}$ essendo $\vec{t}$ un vettore del piano tangente in x a $\partial\Omega$. Allora

$$(2.17)\qquad \int_{\partial\Omega} x\cdot\nabla u \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} [(x\cdot\vec{n})\,\vec{n} + \alpha(x)\,\vec{t}] \cdot \nabla u \, d\sigma$$

$$= \int_{\partial\Omega} (x\cdot\vec{n}) \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = -\,|a| \int_{\partial\Omega} x\cdot\vec{n} \, d\sigma = -|a|\; n\; |\Omega|$$

in base alla (2.16).

Infine, siccome vale (2.12) si ha

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{-1} f'(|\nabla u|)\, \nabla(u^2)) = 2\, u \operatorname{div}(|\nabla u|^{-1} f'(|\nabla u|))$$

$$+ 2|\nabla u| f'(|\nabla u|) = 2(|\nabla u|\; f'(|\nabla u|) - u)$$

Quindi per il teorema della divergenza

$$(2.18)\qquad \int_{\Omega} (|\nabla u|\; f'(|\nabla u|) - u) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(|\nabla u|^{-1} f'(|\nabla u|) \nabla(u^2)) dx = \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{-1} f'(|\nabla u|) \frac{\partial u}{\partial n}\, u \, d\sigma = 0$$

Usando (2.16) e (2.17) nella (2.13) si ottiene:

$$(2.19)\qquad f(|a|) n |\Omega| = n \int_{\Omega} f(|\nabla u|) dx + n|a| f'(|a|)\; |\Omega|$$

$$- \int_{\Omega} |\nabla u|\; f'(|\nabla u|) dx + \int_{\Omega} (x\cdot\nabla u) dx\, .$$

Ora osserviamo che

$$(2.20) \qquad \int_\Omega x\cdot\nabla u \, dx = \int_{\partial\Omega} x_i n_i u \, d\sigma - n \int_\Omega u \, dx = -n \int_\Omega u \, dx$$

Sostituendo (2.20) nella (2.19), e tenendo conto della (2.18), si ottiene la (2.15).

<u>Osservazione</u> Notiamo esplicitamente che se fosse $f(t) = \frac{1}{p} t^p$, il caso degenere corrispondente al p-Laplaciano, allora $tf'(t) - f(t) = (1 - \frac{1}{p})t^p$ e la (2.15) darebbe

$$(2.21) \qquad (1 - \frac{1}{p}) \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx + \frac{1}{n} \int_\Omega u \, dx = (1 - \frac{1}{p}) \; |a|^p \; |\Omega|$$

Siccome, d'altra parte, la (2.18) dà in questo caso

$$(2.22) \qquad \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx = \int_\Omega u \, dx \; ,$$

la (2.21) diventa

$$(2.23) \qquad [(1 - \frac{1}{p}) + \frac{1}{n}] \int_\Omega u \, dx = (1 - \frac{1}{p}) \; |a|^p \; |\Omega| .$$

Queste considerazioni sono puramente formali in quanto, come s'è osservato nel paragrafo 1, in generale le soluzioni di $\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = -1$ non sono C^2. Si può però ovviare a tali inconvenienti. Ciò viene fatto in [GL].

Osserviamo ancora che se u soddisfa (2.12), allora la costante a non può essere qualunque. Infatti si ha

$$(2.24) \qquad |\Omega| = - \int_\Omega \mathrm{div}(|\nabla u|^{-1} \; f'(|\nabla u|)\nabla u) dx = - \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{-1} f'(|\nabla u|) \frac{\partial u}{\partial n} \, d\sigma$$

$$= -a \; |a|^{-1} \; f'(|a|) \; |\partial\Omega|$$

E quindi dev'essere

$$(2.25) \qquad f'(|a|) = \frac{|\Omega|}{|\partial\Omega|}$$

Usando tale informazione si ottiene nel caso in cui $f(t) = \frac{1}{p} t^p$ e $\Omega = \{|x|<R\}$ la formula (1.7).

Il Corollario 1 è uno dei due principali ingredienti della dimostrazione del Teorema 2. L'altro è fornito dal seguente

Lemma 2. (Principio di massimo). *Sia* $u \in C^2(\bar{\Omega})$ *una soluzione del problema* (2.12). *Se poniamo*

$$(2.16) \qquad g(x) = [|\nabla u(x)| f'(|\nabla u(x)|) - f(|\nabla u(x)|)] + \frac{1}{n} u(x),$$

allora

$$(2.27) \qquad g(x) \leq |a| \; f'(|a|) - f(|a|) \quad , \quad x \in \Omega.$$

Osservazione. Notiamo esplicitamente che se g è come in (2.26) e u è soluzione di (2.12) allora si ha

$$g\big|_{\partial\Omega} = |a| \; f'(|a|) - f(|a|).$$

Inoltre, g è la funzione che compare al primo membro della (2.15).

Prova. Sia $\delta>0$ con $\delta < \frac{1}{n}$, e consideriamo la funzione su $\bar{\Omega}$

$$(2.28) \qquad g_\delta \overset{\text{def}}{=} g - \delta u = [|\nabla u| f'(|\nabla u| - f(|\nabla u|)] + (\frac{1}{n} - \delta) u.$$

Vogliamo far vedere che g_δ non può assumere un massimo in un punto di Ω. Ra-

gioniamo per assurdo. Sia $x_o \in \Omega$ un punto di massimo relativo per g_δ. Si possono avere due casi: $\nabla u(x_o) = 0$, $\nabla u(x_o) \neq 0$. Vogliamo far vedere che non può verificarsi il caso $\nabla u(x_o)=0$. Un calcolo esplicito dà:

$$(2.29) \qquad (g_\delta)_{x_j} = f''(|\nabla u|) u_{x_\ell x_j} u_{x_\ell} + (\tfrac{1}{n} - \delta) u_{x_j} \text{ in } \Omega.$$

Usando la (2.29) si ottiene in ogni punto $x \in \Omega$ in cui $\nabla u(x) \neq 0$

$$(g_\delta)_{x_j x_j} = f'''(|\nabla u|)|\nabla u|^{-1} u_{x_\ell x_j} u_{x_m x_j} u_{x_\ell} u_{x_m}$$

$$+ f''(|\nabla u|) u_{x_\ell x_j x_j} u_{x_\ell} + f''(|\nabla u|) u_{x_\ell x_j} u_{x_\ell x_j} + (\tfrac{1}{n} - \delta) u_{x_j x_j}.$$

Ora supponiamo che x_o sia tale che $\nabla u(x_o) = 0$. Tenuto conto del fatto che (cfr. 2.2)

$$\lim_{t \to o^+} t^{-1} f'''(t) = 3(p-2)\, \varepsilon^{p-4} ,$$

andando al limite nella (2.30) su una successione $(x_n)_{n \in N}$ in Ω tale che $x_n \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} x_o$, si ottiene

$$(2.31) \qquad \Delta g_\delta(x_o) = f''(0) \sum_{j,\ell=1}^{n} u^2_{x_j x_\ell}(x_o) + (\tfrac{1}{n} - \delta)\Delta u(x_o).$$

Osserviamo ora che dalla (2.5) si trae (ora è $f_\varepsilon = f$)

$$a_{ij}(0) = \delta_{ij}\, f''(0),$$

e quindi la (2.4) implica

$$-1 = \mathrm{div}(|\nabla u|^{-1} f'(|\nabla u|)\nabla u)\,(x_0) = \delta_{ij} f''(0) u_{x_i x_j}(x_0) = f''(0)\Delta u(x_0) \tag{2.32}$$

Infine, per la disuguaglianza di Schwarz si ha

$$(\Delta u)^2 \leq n \sum_{j=1}^{n} u^2_{u_j x_j} \leq n \sum_{j,\ell=1}^{n} u^2_{x_j x_\ell} . \tag{2.33}$$

Usando le (2.32), (2.33) nella (2.31) dà

$$\begin{aligned} \Delta g_\delta(x_0) &\geq f''(0)\,\frac{1}{n}\,(\Delta u(x_0))^2 + (\frac{1}{n} - \delta)\,\Delta u(x_0) \\ &= f''(0)\,\frac{1}{n}\,(-\frac{1}{f''(0)})^2 - (\frac{1}{n} - \delta)\,\frac{1}{f''(0)} = \frac{\delta}{f''(0)} > 0 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Ma la (2.34) non può sussistere in un punto di massimo della g_δ e quindi dev'essere

$$\nabla u(x_0) \neq 0. \tag{2.35}$$

Operiamo ora un cambiamento di coordinate in modo che risulti

$$\nabla u(x_0) = (0,0,\ldots,0,\ |\nabla u(x_0)|) \tag{2.36}$$

Ciò è possibile in virtù della (2.35). Siccome stiamo assumendo che x_0 sia un punto di massimo per g_δ dalle (2.29) e (2.36) si ottiene in x_0

$$0 = (g_\delta)_{x_n} = f''(|\nabla u|)\, u_{x_n x_n}\, |\nabla u| + (\frac{1}{n} - \delta)\, |\nabla u|, \tag{2.37}$$

e quindi

$$u_{x_n x_n}(x_0) = \frac{\delta - \frac{1}{n}}{f''(|\nabla u(x_0)|)} . \tag{2.38}$$

Ora per a_{ij} come in (2.5) poniamo

$$d_{ij}(\sigma) = \frac{a_{ij}(\sigma)}{f''(|\sigma|)}$$

Usando la (2.29) si ottiene in x_o

$$(d_{ij}(\nabla u)(g\delta)_{x_j})_{x_i} = (a_{ij}(\nabla u)u_{x_\ell x_j}\, u_{x_\ell} + (\tfrac{1}{n} - \delta)d_{ij}(\nabla u)u_{x_j})_{x_i}$$

$$(2.39) \qquad = (a_{ij}(\nabla u)\, u_{x_\ell x_j})_{x_i}\, u_{x_\ell} + a_{ij}(\nabla u)u_{x_\ell x_j}\, u_{x_\ell x_i}$$

$$+ (\tfrac{1}{n} - \delta)\, (d_{ij}(\nabla u)\, u_{x_j})_{x_i} \ .$$

Ora osserviamo che dalla (2.4) si ricava

$$(2.40) \qquad (a_{ij}(\nabla u)u_{x_\ell x_j})_{x_i} = 0 \qquad \ell = 1,\dots,n \ .$$

Analizziamo il secondo addendo a secondo membro della (2.39). Se nella (2.5) si prende $\sigma \in R^n\setminus\{0\}$ tale che $\sigma = (0,0,\dots,0,|\sigma|)$, allora si ottiene

$$(2.41) \qquad a_{ij}(\sigma) = \begin{cases} \delta_{ij}\, \dfrac{f'(|\sigma|)}{|\sigma|} \ , & i,j = 1,\dots,n, \text{ ioj } \neq n, \\ f''(|\sigma|) \ , & i=j=n \ . \end{cases}$$

La (2.41) è evidente se $i,j = 1,\dots,n-1$. Se infine $i=j=n$ si ha da (2.5)

$$a_{nn}(\sigma) = |\sigma|^{-3}\{|\sigma|f''(|\sigma|)-f'(|\sigma|)\}\,\sigma_n^2 + |\sigma|^{-1}f'(|\sigma|)$$

$$= |\sigma|^{-1}\{|\sigma|f''(|\sigma|)-f'(|\sigma|)\} + |\sigma|^{-1}f'(|\sigma|) = f''(|\sigma|)$$

Utilizzando la (2.41) si ottiene in x_o

$$(2.42)\qquad \begin{aligned} a_{ij}(\nabla u)u_{x_\ell x_j}\,u_{x_\ell x_i} &= |\nabla u|^{-1}f'(|\nabla u|)\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{\ell=1}^{n} u^2_{x_\ell x_i} \\ &+ f''(|\nabla u|)\sum_{\ell=1}^{n} u^2_{x_\ell x_n}\,. \end{aligned}$$

Possiamo perciò riscrivere la (2.39) così

$$(2.43)\qquad \begin{aligned} (d_{ij}(\nabla u)(g_\delta)_{x_j})_{x_i} &= |\nabla u|^{-1}f'(|\nabla u|)\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{\ell=1}^{n} u^2_{x_\ell x_i} \\ &+ f''(|\nabla u|)\sum_{\ell=1}^{n} u^2_{x_\ell x_n} + \left(\frac{1}{n}-\delta\right)(d_{ij}(\nabla u)u_{x_j})_{x_i} = I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Procedendo come in (2.33) si ottiene la stima

$$(2.44)\qquad I_1 \geq |\nabla u|^{-1}\, f'(|\nabla u|)\,\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1} u_{x_i x_i}\right)^2 .$$

Ora dalle (2.4), (2.41) e (2.38) si ha in x_o

$$(2.45)\qquad \sum_{i=1}^{n-1} u_{x_i x_i} = -\frac{|\nabla u|}{f'(|\nabla u|)}\,(1 + f''(|\nabla u|)u_{x_n x_n}) = -\frac{|\nabla u|}{f'(|\nabla u|)}\,\left(1+\delta-\frac{1}{n}\right),$$

e quindi

$$(2.46) \qquad I_1 \geq \frac{|\nabla u|}{(n-1)f'(|\nabla u|)} \left(1 + \delta - \frac{1}{n}\right)^2$$

Dalla (2.38) si ha

$$(2.47) \qquad I_2 \geq f''(|\nabla u|)\, u^2_{x_n x_n} = \frac{(\frac{1}{n} - \delta)^2}{f''(|\nabla u|)} .$$

Esaminiamo infine I_3.

Usando la (2.41), la (2.36) e la (2.38) si perviene all'identità valida in x_o.

$$(2.48) \qquad I_3 = - \frac{(\frac{1}{n} - \delta)^2}{f''(|\nabla u|)} + (\frac{1}{n} - \delta)(\frac{1}{n} - \delta - 1) \frac{|\nabla u|}{f'(|\nabla u|)}$$

Combinando (2.46), (2.47) e (2.48) si ottiene finalmente

$$(2.49) \qquad (d_{ij}(\nabla u)(g_\delta)_{x_j})_{x_i} > \frac{|\nabla u|}{f'(|\nabla u|)} \left[\frac{(1 - \frac{1}{2})^2}{n-1} + \frac{1}{n}(\frac{1}{n} - 1)\right] = 0 .$$

La (2.49) dimostra che g_δ non può assumere un massimo in Ω e quindi dev'essere

$$(2.50) \qquad g_\delta(x) < |a|f'(|a|) - f(|a|) \qquad \forall x \in \Omega$$

Facendo ora tendere $\delta \to 0$ in (2.50) si ottiene la (2.27).

Il Corollario 1 e il Lemma 2 hanno come immediata conseguenza il seguente

<u>Lemma 3.</u> *Sia* $u \in C^2(\bar{\Omega})$ *una soluzione di* (2.12). *Allora dev'essere*

$$(2.51) \qquad |\nabla u|\, f'(|\nabla u|) - f(|\nabla u|) + \frac{1}{n} u \equiv |a|f'(|a|) \text{ in } \Omega.$$

Con il Lemma 3 a disposizione la dimostrazione del Teorema 2 segue da argomenti di simmetria.

<u>Prova del Teorema 2.</u> Osserviamo che la (2.51) implica che valgano le uguaglianze nelle (2.46), (2.47). Sia G l'insieme così definito

$$G = \{x \in \Omega \mid |\nabla u(x)| > 0\}.$$

G è ovviamente aperto. Sia $x_0 \in G$ fissato. Operiamo una trasformazione di coordinate in modo tale che in x_0 valga la (2.36). Ora si può avere uguaglianza nelle (2.46), (2.47), (2.48) se e solo se in x_0

$$(2.52)\qquad \begin{cases} u_{x_i x_j} = -\delta_{ij}\dfrac{|\nabla u|}{nf'(|\nabla u|)}, & i \text{ o } j \neq n, \\[2ex] u_{x_n x_n} = -\dfrac{1}{nf''(|\nabla u|)}. & \end{cases}$$

Sia $y_0 \in \Omega$ tale che $\nabla u(y_0) = 0$. Un tale punto esiste in quanto u ha un massimo assoluto in Ω.

Affermiamo che

$$(2.53)\qquad \lambda(x) = (f'(|\nabla u(x)|))^2 - \frac{|x-y_0|^2}{n^2} = 0 \quad \forall x \in \Omega.$$

La verifica di (2.53) si fa tramite la (2.52) facendo vedere che l'Hessiana di $\frac{n^2}{2} f'(|\nabla u|)^2$ è la matrice identità in G, e quindi λ è una funzione lineare in G. Ma siccome $f'(|\nabla u|)^2$ si annulla con le sue derivate su $\partial G \cap \Omega = \{x \in \Omega \mid |\nabla u(x)| = 0\}$ tale funzione lineare dev'essere nulla su Ω, da cui (2.53). Siccome $f' \uparrow$, la (2.53) implica che $|\nabla u|$ è simmetrico rispetto a y_0. Ma allora ciò è vero anche per la u in base alla (2.51).

BIBLIOGRAFIA

[A] P. AVILES, Symmetry Theorems Related to Pompeiu's Problem, Amer. J. of Math. 108 (1986), 1023-1036.

[B] C. BERENSTEIN, An Inverse Spectral Theorem and Its Relation to the Pompeiu Problem, Journal d'Analyse Mathem., 37 (1980), 128-144.

[BY] C. BERENSTEIN and P. YANG, An Inverse Neumann Problem, Preprint.

[E] J.L. ERICKSEN, Overdetermination of the Speed in Rectilinear Motion of Non-Newtonian Fluids, Quarterly of Appl. Math., 14 (1956), 318-321.

[FS] R.L. FOSDICK and J. SERRIN, Rectilinear Steady Flow of Simple Fluids, Proc. Royal Soc. London, A. 332 (1973), 311-333.

[GL] N. GAROFALO and J.L. LEWIS, A Symmetry Result Related to Some Overdetermined Boundary Value Problems, preprint.

[LU] O.A. LADYZHENSKAYA and N. URALT'TSEVA, Linear and Quasilinear Elliptic Equations, Academic Press (1968).

[S] J. SERRIN, A Symmetry Problem in Potential Theory, Arch. Rat. Mech. Anal., 43 (1971), 304-318.

[W] H. WEINBERGER, Remark on the Preceding Paper of Serrin, Arch. Rat. Mech. Anal., 43 (1971), 319-320.

$[Wi]_1$ S.A. WILLIAMS, A Partial Solution of the Pompeiu Problem, Math. Ann. 223 (1976), 183-190.

$[Wi]_2$ S.A. WILLIAMS, Analyticity of the Boundary for Lipschitz Domains without the Pompeiu Property, Indiana Univ. Math. J., 30, no. 3 (1981), 357-369.

[Y] S.T. YAU, Seminar on Differential Geometry, Problem Section; S.T. Yau Ed., Annals of Math. Studies, Princeton Univ. Press (1982).